Лекція № 14

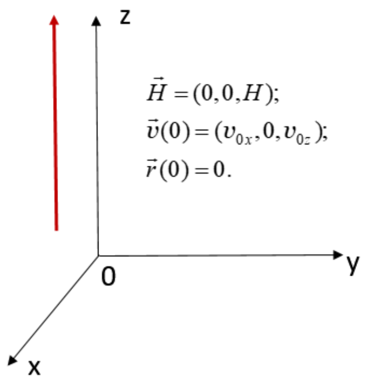
4.9.2. Рух релятивістського заряду в постійному однорідному магнітному полі

Рівняння руху заряду в полі (див. ф-лу (4.15)) для випадку $\vec{E}=0,\ \vec{H}=const$ запишеться так

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{e}{c}[\vec{v},\vec{H}]. \tag{4.68}$$

Нехай магнітне поле орієнтоване уздовж додатного напрямку осі z $\vec{H}=(0,0,H)$:

$$[\vec{v},\vec{H}]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ v_x & v_y & v_z\\ 0 & 0 & H\end{vmatrix}$$



Рівняння (4.68) в проекціях на осі декартових координат:

$$\begin{cases}\dfrac{dp_x}{dt}=\dfrac{eH}{c}v_y;\\[2mm] \dfrac{dp_y}{dt}=-\dfrac{eH}{c}v_x;\\[2mm] \dfrac{dp_z}{dt}=0.\end{cases} \tag{4.69}$$

Початкові умови обираємо такі:

$$\begin{gathered}v_x(0)=v_{0x};\ v_y(0)=0;\ v_z(0)=v_{0z};\\ x(0)=y(0)=z(0)=0.\end{gathered} \tag{4.70}$$

Магнітне поле не змінює початкової енергії заряду, з якою він «влетів» в магнітне поле. Для обраних початкових умов

$$\varepsilon_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}; \quad \upsilon_0^2 = \upsilon_{0x}^2 + \upsilon_{0z}^2. \tag{4.71}$$

Знов скористаємось зв'язком між імпульсом, швидкістю та енергією релятивістської частинки. Відразу врахуємо, що її енергія не змінюється. Маємо

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon_0 \vec{\upsilon}}{c^2}; \quad \vec{\upsilon} = \frac{c^2 \vec{p}}{\varepsilon_0}. \tag{4.72}$$

Згідно з (4.72) швидкість та імпульс при русі в постійному магнітному полі пропорційні одне одному. Рівняння (4.69) перепишемо для проекцій швидкості

$$\begin{cases} \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{ceH}{\varepsilon_0}\upsilon_y; \\ \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -\dfrac{ceH}{\varepsilon_0}\upsilon_x; \\ \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = 0. \end{cases} \tag{4.73}$$

Уздовж осі z відбувається рівномірний рух зі швидкістю

$$\upsilon_z(t) = \upsilon_{0z} = const.$$

Відповідний закон руху уздовж осі z з урахуваннях граничних умов (4.70)

$$z(t) = \upsilon_{0z} t.$$

Рівняння, які описують рух площині x0y, зручно об'єднати в одне рівняння для комплексної змінної $\upsilon_x + i\upsilon_y$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{ceH}{\varepsilon_0}\upsilon_y; \Bigg| \cdot 1 \\ \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -\dfrac{ceH}{\varepsilon_0}\upsilon_x; \Bigg| \cdot i \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\upsilon_x + i\upsilon_y\right) = -i\frac{ceH}{\varepsilon_0}\left(\upsilon_x + i\upsilon_y\right). \tag{4.74}$$

$\omega = \dfrac{ceH}{\varepsilon_0}$ – циклотронна частота (кругова частота (кутова швидкість)) обертання заряду в площині x0y):

$$\frac{d}{dt}\left(\upsilon_x + i\upsilon_y\right) = -i\omega\left(\upsilon_x + i\upsilon_y\right).$$

Шукаємо загальний розв'язок:

$$\upsilon_x + i\upsilon_y = Ae^{-i\omega t} = A_0 e^{-i\omega t + i\varphi}.$$

$$\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = |A|^2 = A_0^2 = \upsilon_\perp^2.$$

З урахуванням початкових умов

$$\upsilon_x + i\upsilon_y = \upsilon_\perp\left(\cos(\omega t - \varphi) - i\sin(\omega t - \varphi)\right);$$

$$\upsilon_x(0) + i\upsilon_y(0) = \upsilon_{0x} = \upsilon_\perp\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right);$$

$$\varphi = 0;$$

$$\upsilon_x = \upsilon_\perp \cos(\omega t); \quad \upsilon_y = -\upsilon_\perp \sin(\omega t);$$

Закон руху у площині x0y

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_\perp \cos(\omega t); \quad \frac{dy}{dt} = -\upsilon_\perp \sin(\omega t);$$

$$x(t) = \frac{\upsilon_\perp}{\omega}\sin(\omega t) + x_0; \quad y(t) = \frac{\upsilon_\perp}{\omega}\cos(\omega t) + y_0;$$

$$x(0) = x_0 = 0; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = \frac{\upsilon_\perp}{\omega} + y_0 = 0; \quad y_0 = -\frac{\upsilon_\perp}{\omega};$$

$$x(t) = \frac{\upsilon_\perp}{\omega}\sin(\omega t); \quad y(t) = \frac{\upsilon_\perp}{\omega}\left[\cos(\omega t) - 1\right].$$

Отримали формули залежності швидкості від часу

$$\begin{cases} \upsilon_x(t) = \upsilon_\perp \cos(\omega t); \\ \upsilon_y(t) = -\upsilon_\perp \sin(\omega t); \\ \upsilon_z(t) = \upsilon_{0z} = const. \end{cases} \tag{4.75}$$

та закон руху заряду в постійному однорідному магнітному полі, направленому уздовж осі z

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\upsilon_\perp}{\omega}\sin(\omega t); \\ y(t) = \dfrac{\upsilon_\perp}{\omega}\left[\cos(\omega t) - 1\right]; \\ z(t) = \upsilon_{0z} t. \end{cases} \qquad (4.76)$$

Рух релятивістського заряду в постійному однорідному магнітному полі принципово нічим не відрізняється від руху заряду в магнітному полі в класичній механіці. Це рух по гвинтовій лінії постійного радіусу з постійною кутовою швидкістю зі сталим кроком гвинта. Нагадаємо, що рух по гвинтовій лінії є сумою двох рухів: обертання з кутовою швидкістю ω по окружності радіусу r_0 плюс рівномірний рух в напрямку осі z (в напрямку поля) з початковою швидкістю υ_{0z}:

$$\omega = \frac{ceH}{\varepsilon_0};$$

$$r_\perp = \frac{\upsilon_\perp}{\omega} = \frac{cp_\perp}{eH}; \qquad (4.77)$$

$$h = \upsilon_{0z} T = \upsilon_{0z}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \upsilon_{0z}\varepsilon_0}{ceH} = \frac{2\pi p_{0z} c}{eH} = \frac{2\pi c p_{\|}}{eH}.$$

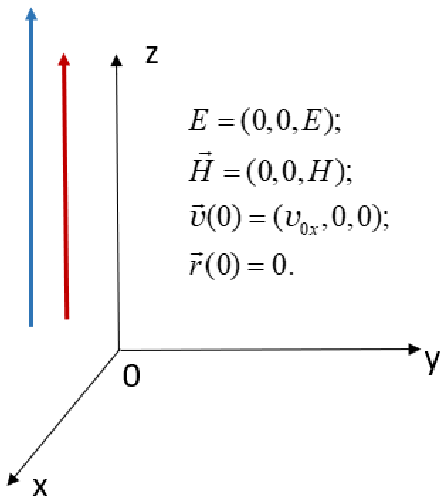
Відповідне класичне значення частоти обертання отримаємо заміною $\varepsilon_0 \to mc^2$:

$$\omega_{cl.} = \frac{eH}{mc}.$$

Релятивістська частота обертання менше, ніж класична, радіус окружності та крок гвинта є більшими ніж класичні. Релятивістський заряд обертається в магнітному полі повільніше та по окружності більшого радіусу. За один оберт переміщується на більшу відстань уздовж напрямку поля.

4.9.3. Рух релятивістського заряду в паралельних полях електричному та магнітному полях

Електричне та магнітне поля як і раніш вважаємо постійними та однорідними. Обираємо систему координат, в якій обидва поля направлені уздовж осі z (див. рис.)



В постійному однорідному магнітному полі заряд рухався по гвинтовій лінії із циклотронною частотою та постійним кроком гвинта. Уздовж напрямку магнітного поля швидкість руху була незмінною $v_z = v_{0z} = const$. Електричне поле змінює кінетичну енергію заряду – прискорює заряд, тому характер руху уздовж напрямку осі z суттєво зміниться. В напрямку, перпендикулярному полям – в площині x0y – таких суттєвих змін не буде.

Рівняння руху заряду в полі (ф-ла (4.15))

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v},\vec{H}]$$

для обраного напрямку полів матиме такі проекції

$$\begin{cases} \dfrac{dp_x}{dt} = \dfrac{eH}{c} v_y; \\ \dfrac{dp_y}{dt} = -\dfrac{eH}{c} v_x; \\ \dfrac{dp_z}{dt} = eE. \end{cases} \tag{4.78}$$

Рівняння руху уздовж осі z відокремлене від рівнянь в площині x0y.

Початкові умови візьмемо такі:

$$\vec{p}(0) = (p_0, 0, 0); \quad \vec{r}(0) = 0. \tag{4.79}$$

Відразу знаходимо закон зміни проекції імпульсу на вісь z. З урахуванням граничних умов (4.79) отримаємо

$$p_z(t) = eEt$$

Скористаємось рівнянням зміни кінетичної енергії (4.17) (нагадаємо, що домовились називати так енергію частинки разом з енергією спокою), щоб знайти закон зміни цієї енергії з часом

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = eE\upsilon_z; \quad \upsilon_z = \frac{c^2 p_z}{\varepsilon} = \frac{c^2 eEt}{\varepsilon}; \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{(ceE)^2 t}{\varepsilon};$$

$$\varepsilon d\varepsilon = (ceE)^2 t dt;$$

$$\int \varepsilon d\varepsilon = (ceE)^2 \int t dt;$$

$$\varepsilon^2 = (ceEt)^2 + const;$$

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = \sqrt{c^2 p_0^2 + m^2 c^4}; \quad const = \varepsilon_0^2;$$

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}. \tag{4.80}$$

Шукаємо закон руху уздовж осі z:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{c^2 p_z}{\varepsilon} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}};$$

$$z(t) = \int \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}} dt = \frac{1}{eE}\left[\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2} - \varepsilon_0\right].$$

Уздовж осі z, як і слід було очікувати – релятивістський рівноприскорений рух:

$$z(t) = \frac{1}{eE}\left[\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2} - \varepsilon_0\right]. \tag{4.81}$$

Рівняння руху в площині x0y об’єднаємо. Для цього введемо комплексну змінну $p_x + ip_y$:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_x}{dt} = \dfrac{eH}{c}\upsilon_y; \Big| \cdot 1 \\ \dfrac{dp_y}{dt} = -\dfrac{eH}{c}\upsilon_x; \Big| \cdot i \end{cases} \quad \frac{d}{dt}\left(p_x + ip_y\right) = -i\frac{eH}{c}\left(\upsilon_x + i\upsilon_y\right);$$

$$\frac{d}{dt}\left(p_x + ip_y\right) = -i\frac{ceH}{\varepsilon(t)}\left(p_x + ip_y\right). \tag{4.82}$$

Тут $\varepsilon(t)$ визначається формулою (4.80). Рівняння (4.82) зовнішнє дуже схоже на рівняння руху в постійному однорідному магнітному полі (4.74), але тепер енергія, що стоїть справа в знаменнику, є змінною. Диференціальне рівняння тепер не є рівнянням із сталими коефіцієнтами. Перепишемо це рівняння так

$$\frac{1}{\dfrac{ceH}{\varepsilon(t)}}\frac{d}{dt}\left(p_x + ip_y\right) = -i\left(p_x + ip_y\right).$$

Для розв’язку (4.82) вводимо нову незалежну змінну, яка є функцією від часу

$$d\varphi = \frac{ceH}{\varepsilon(t)}dt;$$

$$\varphi(t) = \int \frac{ceH}{\varepsilon(t)}dt = \int \frac{ceH}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}}dt$$

Нова змінна

$$\varphi(t) = \frac{H}{E}\operatorname{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right). \qquad (4.83)$$

В (4.83) стала інтегрування обрана так, щоб $\varphi(t) = 0$. Для нової незалежної змінної рівняння (4.82) приймає вигляд

$$\frac{d}{d\varphi}\left(p_x + ip_y\right) = -i\left(p_x + ip_y\right). \qquad (4.84)$$

та легко розв’язується

$$p_x + ip_y = Ae^{-i\varphi(t)}.$$

$$p_x^2 + p_y^2 = |A|^2 = p_\perp^2;$$

$$p_x(0) = p_0; \quad p_y(0) = 0; \quad p_\perp = p_0;$$

$$p_x + ip_y = p_\perp e^{-i\varphi(t)};$$

$$p_x(\varphi) = p_0\cos\varphi; \quad p_y(\varphi) = -p_0\sin\varphi. \qquad (4.85)$$

Переходимо в (4.85) від проекцій імпульсу до проекцій швидкості

$$\upsilon_x + i\upsilon_y = \frac{c^2 p_0}{\varepsilon(t)}e^{-i\varphi}; \quad \frac{d}{dt}(x+iy) = \frac{c^2 p_0}{\varepsilon(t)}e^{-i\varphi};$$

$$d\varphi = \frac{ceH}{\varepsilon(t)}dt; \quad dt = \frac{\varepsilon(t)}{ceH}d\varphi; \quad \frac{\cancel{c}eH}{\cancel{\varepsilon(t)}}\frac{d}{d\varphi}(x+iy) = \frac{c^{\cancel{2}} p_0}{\cancel{\varepsilon(t)}}e^{-i\varphi};$$

$$\frac{d}{d\varphi}(x+iy) = \frac{cp_0}{eH}e^{-i\varphi};$$

$$x + iy = i\frac{cp_0}{eH}e^{-i\varphi} + A = i\frac{cp_0}{eH}(\cos\varphi + i\sin\varphi) + A.$$

Врахуємо граничні умови

$$x(0)=x(0)=0;$$

$$x(0)+iy(0)=i\frac{cp_0}{eH}(\cos\varphi(0)+i\sin\varphi(0))+A=0;\quad \varphi(0)=0;$$

$$A=-i\frac{cp_0}{eH}.$$

Отримали проекцію закону руху на площину x0y

$$x(t)=r_\perp\sin\varphi(t);\quad y(t)=r_\perp\left[\cos\varphi(t)-1\right];$$
$$r_\perp=\frac{cp_0}{eH}. \tag{4.86}$$

Це обертання по окружності радіусу $r_\perp$ зі змінною кутовою швидкістю

$$\omega(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{ceH}{\varepsilon(t)}=\frac{ceH}{\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}}. \tag{4.87}$$

Отримали такий закон руху в паралельних полях

$$\begin{cases} x(t)=r_\perp\sin\left[\dfrac{H}{E}\,\mathrm{Arcsh}\left(\dfrac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)\right]; \\ y(t)=r_\perp\left\{\cos\left[\dfrac{H}{E}\,\mathrm{Arcsh}\left(\dfrac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)\right]-1\right\}; \\ z(t)=\dfrac{1}{eE}\left[\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\right]. \end{cases} \tag{4.88}$$

Нагадаємо, що тут $r_\perp=\dfrac{cp_0}{eH}$ – це радіус окружності, по якій відбувається обертання в площині x0y. Радіус такий самий, як у випадку руху в тільки магнітному полі. В чисто магнітному полі це обертанні зі сталою кутовою швидкістю, бо тоді в формулі (4.87) енергія в знаменнику є сталою величиною $\varepsilon=\varepsilon_0$. Формула (4.87) тоді співпадає з формулою для циклотронної частоти в (4.74). При наявності ще й електричного поля того ж самого напрямку, що й магнітне, обертання відбувається із кутовою швидкістю (4.87), яка зменшується з часом. В граничному випадку $t\to\infty$ частота наближається до нуля

$$\omega(t)=\frac{ceH}{\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}}\approx\frac{H}{E}\cdot\frac{1}{t}\to 0.$$

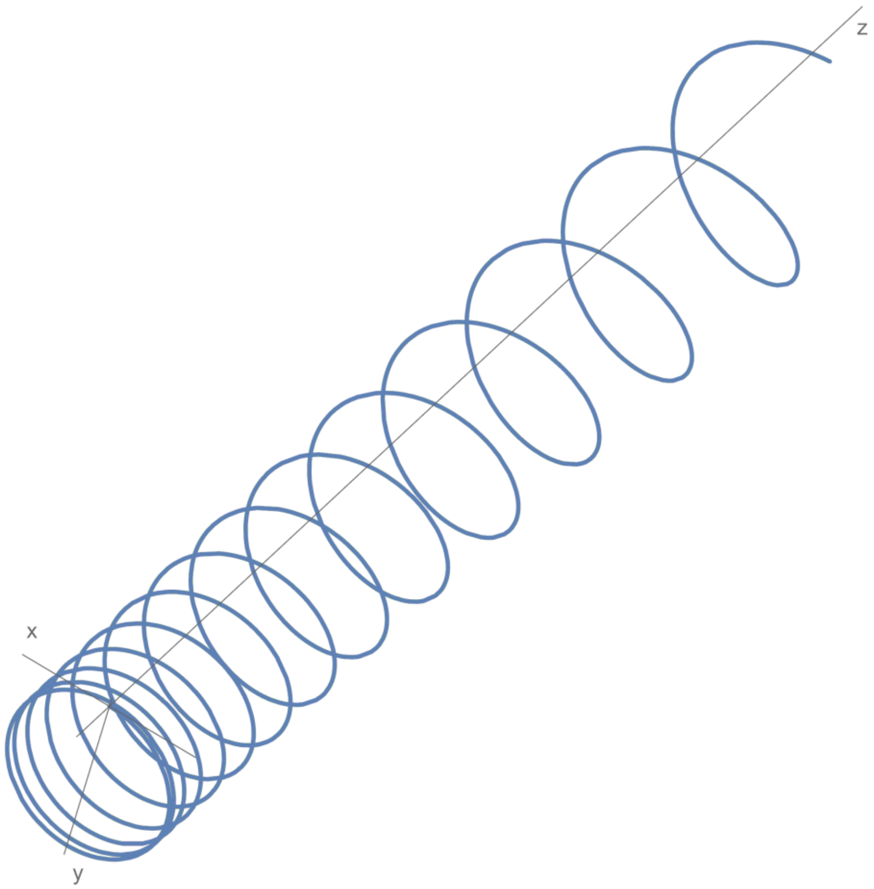
В (4.88) у явному вигляді підставили фазу $\varphi(t)$ з (4.83). Можна закон руху записати більш компактно через $\varphi(t)$. Величина $\varphi(t)$ має значення фази. Кутова швидкість (4.87) – похідна по часу від фази $\varphi(t)$.

$$\frac{ceEt}{\varepsilon_0} = \operatorname{sh}\left(\frac{E}{H}\varphi(t)\right);$$

$$z(\varphi) = \frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\sqrt{\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)^2 + 1} - 1\right] = \frac{\varepsilon_0}{eE}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{E}{H}\varphi\right) - 1\right).$$

$$\begin{cases} x(t) = r_\perp \sin\varphi(t); \\ y(t) = r_\perp\left[\cos\varphi(t) - 1\right]; \\ z(t) = \dfrac{\varepsilon_0}{eE}\left(\operatorname{ch}\left(\dfrac{E}{H}\varphi\right) - 1\right); \end{cases} \qquad \varphi(t) = \frac{H}{E}\operatorname{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right). \tag{4.89}$$

Траєкторія руху – гвинтова лінія зі зростаючим кроком гвинта та зі змінною частотою, яка зменшується з часом.



Дослідимо нерелятивістську границю, якій відповідає $\frac{ceEt}{\varepsilon_0} \ll 1$.

$$x(t) = r_\perp \sin\left[\frac{H}{E}\mathrm{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)\right] \approx r_\perp \sin\left[\frac{H}{E}\left(\frac{ceEt}{mc^2}\right)\right] = r_\perp \sin\left(\frac{eH}{mc}t\right);$$

$$y(t) = r_\perp 2\left\{\cos\left[\frac{H}{E}\mathrm{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)\right] - 1\right\} \approx r_\perp\left[\cos\left(\frac{eH}{mc}t\right) - 1\right];$$

$$z(t) = \frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)^2} - 1\right] \approx \frac{\varepsilon_0}{eE}\frac{1}{2}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{c^2 eE}{\varepsilon_0}t^2 \approx \frac{1}{2}\frac{\cancel{c^2} eE}{m\cancel{c^2}}t^2 = \frac{eE}{2m}t^2.$$

В нерелятивістському частота обертання є класичною циклотронною частотою – обертання відбувається зі сталою частотою $\omega_{cl} = \frac{eH}{mc}$. Уздовж осі z відбувається рівноприскорений рух з класичним прискоренням $a = \frac{eE}{m}$:

$$\begin{cases} x(t) = r_\perp \sin(\omega_{cl} t) \\ y(t) = r_\perp \sin(\omega_{cl} t) \\ \quad z(t) = \dfrac{at^2}{2}. \end{cases} \tag{4.90}$$

Ефект зміни частоти в паралельних полях є суто релятивістським ефектом, пов'язаним з тим, що повна швидкість руху заряду повинна залишатися меншою, ніж швидкість світла.

В ультрарелятивістському випадку $\frac{ceEt}{\varepsilon_0} \gg 1$ частота обертання наближається до нуля, крок гвинта до нескінченності, рух наближається до рівномірного руху зі швидкістю світла.